LIBRIS | We know books

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII

Marcel Ţena • Marian Andronache • Dinu Şerbănescu

MATEMATICĂ M1

MANUAL PENTRU CLASA A XI-a

ART Grup Editorial

LIBRIS | We know books

CUPRINS

ELEMENTE DE CALCUL MATRICEAL ŞI SISTEME DE ECUAŢII

I. PERMUTĂRI 3
Noţiunea de permutare. Înmulţirea permutărilor 3
Proprietăţile înmulţirii permutărilor 3
Inversiuni. Semnul unei permutări 4
II. MATRICE 9
Noţiunea de matrice. Mulţimi de matrice 9
Operaţii cu matrice 11
III. DETERMINANŢI 23
Noţiunea de determinant 23
Proprietăţile determinanţilor 25
Calculul determinanţilor 29
IV. SISTEME DE ECUAŢII LINIARE 37
Matrice inversabile în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ 37
Ecuaţii matriceale 40
Sisteme Cramer 42
Rangul unei matrice 44
Studiul compatibilităţii şi rezolvarea sistemelor liniare 48
Metoda lui Gauss de rezolvare a sistemelor liniare 54
Aplicaţii ale determinanţilor în geometria analitică 56
Probleme recapitulative de algebră 59

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

I. LIMITE DE FUNCŢII 63
Noţiuni elementare despre mulţimi de puncte pe dreapta reală, intervale 63
Mărginire, simbolurile $+\infty$ şi $-\infty$, dreapta încheiată, vecinătăţi 65
Funcţii reale de variabilă reală 68
Funcţii raţionale 71
Şiruri de numere reale, şiruri monotone, şiruri mărginite 77
Comportarea valorilor unei funcţii cu grafic continuu când argumentul se apropie de o valoare dată 80
Limita unui şir cu vecinătăţi, şiruri convergente, proprietăţi 80
Operaţii cu şiruri convergente sau care au limită 85
Operaţii cu şiruri care au limită, operaţii în $\overline{\mathbb{R}}$, nedeterminări 88
Limita şirurilor monotone, criteriul de convergenţă al lui Weierstrass 93
Trecerea la limită în inegalităţi, criteriile majorării şi cleştelui 94
Numărul e, şirul $(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}}$ cu $a_n \to 0$, $a_n \neq 0$ 96
Alte metode pentru calculul limitelor de şiruri 101
Şiruri recurente 105
Limita unei funcţii într-un punct, interpretare grafică 107
Operaţii cu limite de funcţii. Limitele funcţiilor elementare 110
Calculul limitelor de funcţii, cazuri exceptate 115
Criterii de existenţă a limitelor de funcţii cu vecinătăţi, cu limite laterale 120
Asimptote 123

LIBRIS We know books

II. CONTINUITATE 129
Interpretarea grafică a continuității unei funcții, continuitatea într-un punct și pe o mulțime 133
Operații cu funcții continue 133
Proprietatea lui Darboux, existența soluțiilor unor ecuații, semnul unei funcții continue 137
Legătura continuitate-mărginire 141
III. DERIVABILITATE 145
Probleme care conduc la conceptul de derivată 145
Derivabilitatea unei funcții într-un punct pe o mulțime, funcția derivată 145
Derivatele funcțiilor uzuale 147
Legătura continuitate-derivabilitate, derivate laterale 152
Operații cu funcții derivabile, reguli de derivare 154
Derivatele funcțiilor compuse 156
Derivata funcției inverse 158
Interpretarea geometrică a derivatei unei funcții într-un punct 161
Derivate de ordinul doi și de ordin superior 164
O aplicație: Rădăcinile multiple ale ecuațiilor polinomiale (extindere) 167
Puncte de extrem, Teorema lui Fermat 170
Teorema lui Rolle, Lagrange, Cauchy 173
Consecințe ale Teoremei lui Rolle. Șirurile lui Rolle 175
Consecințe ale Teoremei lui Lagrange, monotonia unei funcții calculul derivatei unei funcții într-un punct 177
Regulile lui L'Hospital 181
Rolul derivatei întâi în studiul funcțiilor, puncte de extrem, monotonie 186
Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor, concavitate, puncte de inflexiune 189
IV. REPREZENTAREA GRAFICĂ A FUNCȚIILOR 193
Reprezentarea grafică a ecuațiilor, utilizarea graficelor în determinarea numărului de soluții ale unei ecuații 198
Conicele ca locuri geometrice remarcabile 201
Reprezentarea grafică a conicelor 205
Probleme recapitulative de analiză 209
SOLUȚII 213

LIBRIS | We know books

ELEMENTE DE CALCUL MATRICEAL ŞI SISTEME DE ECUAŢII LINIARE

I. PERMUTĂRI

NOŢIUNEA DE PERMUTARE ÎNMULŢIREA PERMUTĂRILOR

Am văzut în clasa a X-a că o ***permutare*** a unei mulţimi nevide A este o funcţie bijectivă definită pe A cu valori în A, iar dacă mulţimea A are n elemente, atunci numărul permutările sale este n !.

Vom folosi noţiunea de permutare pentru definirea, în capitolul „Determinanţi", a unei caracteristici numerice, numită determinantul unei matrice. Pentru acest scop este suficient să considerăm permutările mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Notăm mulţimea acestor permutări cu S_n şi o numim ***mulţimea permutărilor de gradul n***.

De obicei, o permutare $\sigma \in S_n$ se notează printr-un tablou de tipul:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Prin această scriere, ***compunerea*** permutărilor (pe care o notăm multiplicativ) se face foarte uşor.

Astfel, dacă $\sigma,\tau \in S_n$ iar $\tau(i) = j$, $\sigma(j) = k$, atunci $(\sigma\circ\tau)(i) = (\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i)) = \sigma(j) = k$, deci compunerea se face după următoarea „schemă":

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & \underset{\downarrow}{j} & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & k & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & \underset{\downarrow}{i} & \ldots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \ldots & j & \ldots & \tau(n) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & n \\ \ldots & \ldots & \ldots & k & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

De exemplu, dacă $\sigma,\tau \in S_n$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ şi $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, atunci

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ şi}$$

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Datorită notaţiei multiplicative, această operaţie se numeşte ***înmulţirea*** permutărilor. Deoarece injectivitatea şi surjectivitatea sunt păstrate prin compunere, rezultă că prin înmulţirea a două elemente din S_n obţinem un element din S_n.

PROPRIETĂŢILE ÎNMULŢIRII PERMUTĂRILOR

Am văzut în clasele a IX-a şi a X-a că, pe mulţimea funcţiilor definite pe o mulţime nevidă A cu valori în A, compunerea funcţiilor este asociativă, funcţia $1_A : A \to A$ cu $1_A(x) = x$, $x \in A$ este element neutru şi orice funcţie bijectivă este inversabilă.

LIBRIS | We know books

În consecință, înmulțirea permutărilor are, pe S_n, proprietățile:

a) este asociativă, deci $(\sigma\tau)\varphi = \sigma(\tau\varphi)$, $\forall \sigma,\tau,\varphi \in S_n$.

b) are element neutru, anume permutarea identică $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$,

deci $\sigma e = e\sigma = \sigma$, $\forall \sigma \in S_n$.

c) orice permutare este inversabilă, deci pentru $\sigma \in S_n$ există $\sigma^{-1} \in S_n$ astfel încât $\sigma \cdot \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \cdot \sigma = e$; permutarea σ^{-1} se numește ***inversa*** permutării σ.

Observații. 1) Pentru $\sigma \in S_n$, permutarea σ^{-1} se obține schimbând locul celor două linii din tabloul care definește permutarea σ.

De exemplu, dacă $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, atunci $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Înmulțirea permutărilor pe S_n, $n \geq 3$ nu este comutativă, deci, în general, $\sigma\tau \neq \tau\sigma$ pentru $\sigma,\tau \in S_n$.

În situația particulară în care, pentru permutările $\sigma,\tau \in S_n$, avem $\sigma\tau = \tau\sigma$, vom spune că cele două permutări comută.

3) Proprietățile înmulțirii permutărilor ne permit să definim, pentru o permutare $\sigma \in S_n$, puterile întregi ale lui σ, astfel:

$$\sigma^k = \begin{cases} \underbrace{\sigma \cdot \sigma \cdot \ldots \cdot \sigma}_{k \text{ ori}}, & \text{pentru } k \in \mathbb{N}^* \\ e, & \text{pentru } k = 0 \\ (\sigma^{-k})^{-1}, & \text{pentru } k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \end{cases}$$

Din această definiție rezultă că $\sigma^k \cdot \sigma^p = \sigma^{k+p}$ și $(\sigma^k)^p = \sigma^{kp}$, $\forall\, k,p \in \mathbb{Z}$.

Dacă $\sigma,\tau,\varphi \in S_n$ avem echivalențele:

a) $\sigma\tau = \sigma\varphi \Leftrightarrow \tau = \varphi$

b) $\tau\sigma = \varphi\sigma \Leftrightarrow \tau = \varphi$

Într-adevăr, $\sigma\tau = \sigma\varphi \Leftrightarrow \sigma^{-1}(\sigma\tau) = \sigma^{-1}(\sigma\varphi) \Leftrightarrow (\sigma^{-1}\sigma)\tau = (\sigma^{-1}\sigma)\varphi \Leftrightarrow e \cdot \tau = e \cdot \varphi \Leftrightarrow \tau = \varphi$ și analog pentru echivalența de la punctul b).

Echivalențele a) și b) stabilesc reguli de simplificare la stânga și la dreapta pentru înmulțirea permutărilor.

INVERSIUNI, SEMNUL UNEI PERMUTĂRI

Pentru o permutare $\sigma \in S_n$, $n \geq 2$, o pereche ordonată (i, j) cu $i,j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ în care $i < j$ și $\sigma(i) > \tau(j)$ se numește ***inversiune*** a lui σ.

De exemplu, inversiunile permutării $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in S_4$ sunt perechile (2, 3), (2, 4) și (3, 4), pentru că $\sigma(2) = 4 > 3 = \sigma(3)$, $\sigma(2) = 4 > 2 = \sigma(4)$ și $\sigma(3) = 3 > 2 = \sigma(4)$.

Permutările care au un număr par de inversiuni se numesc ***permutări pare***, iar cele care au un număr impar de inversiuni se numesc ***permutări impare***.

Pentru $\sigma \in S_n$, considerăm numărul rațional $\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$ care, datorită proprietăților date de propoziția ce urmează, se numește ***semnul*** permutării σ.

LIBRIS | We know books

Propoziție

Fie $\sigma \in S_n$. Atunci $\varepsilon(\sigma) = 1$ dacă σ este permutare pară şi $\varepsilon(\sigma) = -1$ dacă σ este permutare impară.

Demonstrație. Deoarece σ este bijectivă avem $\prod_{i\neq j}(\sigma(i)-\sigma(j)) = \prod_{\sigma^{-1}(k)\neq\sigma^{-1}(p)}(k-p) = \prod_{k\neq p}(k-p) = \prod_{i\neq j}(i-j)$.

Atunci $(\varepsilon(\sigma))^2 = \prod_{1\le i<j\le n}\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}\cdot\prod_{1\le i<j\le n}\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} = \prod_{1\le i<j\le n}\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}\cdot\prod_{1\le i<j\le n}\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} =$

$= \prod_{1\le i<j\le n}\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}\cdot\prod_{1\le j<i\le n}\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} = \prod_{i\neq j}\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} = \frac{\prod_{i\neq j}(\sigma(i)-\sigma(j))}{\prod_{i\neq j}(i-j)} = 1$, deci $|\varepsilon(\sigma)| = 1$.

Deoarece o pereche (i, j) cu $i < j$ este inversiune a lui σ dacă şi numai dacă fracția $\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$ este negativă, rezultă din definiția lui $\varepsilon(\sigma)$, că semnul lui este dat de numărul inversiunilor lui σ. În concluzie, dacă σ este pară atunci $\varepsilon(\sigma) = 1$, iar dacă σ este impară $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Comportarea lui ε față de produsul permutărilor este evidențiată de următoarea propoziție.

Propoziție

1°. $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\,\varepsilon(\tau)$, $(\forall)\ \sigma,\tau \in S_n$.

2°. $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$, $(\forall)\ \sigma \in S_n$.

Demonstrație. 1°. Din definiția lui ε rezultă că:

$$\varepsilon(\sigma\tau) = \prod_{1\le i<j\le n}\frac{(\sigma\tau)(i)-(\sigma\tau)(j)}{i-j} = \prod_{1\le i<j\le n}\frac{\sigma(\tau(i))-\sigma(\tau(j))}{i-j}\cdot\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} =$$

$$= \prod_{1\le k<p\le n}\frac{\sigma(k)-\sigma(p)}{k-p}\cdot\prod_{1\le i<j\le n}\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} = \varepsilon(\sigma)\cdot\varepsilon(\tau).$$

2°. Deoarece permutarea e nu are inversiuni, rezultă că $\varepsilon(e) = 1$ şi în consecință $\varepsilon(\sigma)\cdot\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma\sigma^{-1}) = \varepsilon(e) = 1$, deci $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$.

Vom pune acum în evidență un tip particular de permutare, necesar în studiul proprietăților determinanților din capitolul 3.

O permutare $\sigma \in S_n$, $n\ge 2$ se numeşte ***transpoziție*** dacă există $i,j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ cu $i \neq j$ astfel încât $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$ şi $\sigma(k) = k$ pentru orice $k \notin \{i, j\}$. Vom nota transpoziția σ cu $(i\ j)$, deci $(i\ j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & j & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & j & \ldots & i & \ldots & n \end{pmatrix} \in S_n$.

De exemplu, în S_5 avem $(2\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ şi $(5\ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Proprietățile transpozițiilor sunt puse în evidență de următoarea propoziție.

Propoziție

Fie $\sigma \in S_n$ o transpoziție. Atunci:

1°) $\sigma = \sigma^{-1}$.

2°) $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Demonstrație. 1°) Dacă $\sigma = (i\ j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & j & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & j & \ldots & i & \ldots & n \end{pmatrix} \in S_n$, atunci

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & j & \ldots & i & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & j & \ldots & n \end{pmatrix} = (j\ i) = (i\ j) = \sigma.$$

2°) Dacă $i < j$ atunci inversiunile lui $\sigma = (i\ j)$ sunt perechile: $(i, i+1)$, $(i, i+2)$, …, (i, j), $(i+1, j)$, $(i+2, j)$, …, $(j-1, j)$, deci σ are $2(j-i)-1$ inversiuni. În concluzie σ este impară, deci $\varepsilon(\sigma) = -1$.

LIBRIS We know books

Exerciții propuse

1. Să se calculeze produsul $\sigma\tau$ în fiecare din cazurile:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

d) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Să se precizeze inversiunile și semnul permutărilor:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Să se determine semnul permutărilor:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

4. Să se scrie inversele permutărilor:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

5. Să se rezolve ecuația $\sigma x = \tau$ în următoarele cazuri:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Soluție: Scriem $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; atunci $x = \sigma^{-1}\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Să se rezolve ecuația $\sigma x \tau = \theta$ în următoarele cazuri

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Soluție. Scriem $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ și $\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, rezultă că

LIBRIS We know books

$x = \sigma^{-1}\theta\tau^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix} = e.$

b) $\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}$; $\theta = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}$.

c) $\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$; $\theta = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}$.

7. Să se arate că permutarea σ^2 este pară, oricare ar fi permutarea $\sigma \in S_n$, $n \geq 2$ natural.

8. Să se arate că nu există permutări $\sigma \in S_4$ astfel încât $\sigma^2 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$.

9. Să se rezolve ecuația $\sigma^2 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&4&2&3&5\end{pmatrix}$.

10. Să se determine toate permutările $x \in S_3$ care comută cu $\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ și toate permutările $y \in S_4$ care comută cu $\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$.

11. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^2 = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$; b) $x^2 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$.

12. Să se precizeze numărul de transpoziții din S_n, $n \geq 2$.

13. Să se arate că: $(12)(34) = (34)(12)$ în S_n, $n \geq 4$.

14. Să se verifice că în S_n avem egalitățile:

a) $(i\,j) = (1\,i)(1\,j)(1\,i)$; b) $(1\,i)(1\,j)(1\,i) = (1\,j)(1\,i)(1\,j)$; c) $(i\,j) = (1\,i)(i\,j)(1\,j)$, oricare ar fi $i,j \in \{2, 3, \ldots, n\}$ cu $n \geq 3$ şi $i \neq j$.

15. Fie $n \geq 2$ un număr natural. O submulțime nevidă H a lui S_n se numeşte ***închisă*** dacă $\sigma\tau \in H$ pentru orice permutări $\sigma, \tau \in H$.

Considerăm H o submulțime închisă a lui S_n şi σ o permutare din H.

a) Să se arate că $\{\sigma^p \mid p \in \mathbb{N}^*\} \subset H$.

b) Să se demonstreze că există numerele întregi $k < \ell$ astfel încât $\sigma^k = \sigma^\ell$.

c) Să se arate că pentru orice permutare $\varphi \in S_n$ există $p \in \mathbb{N}^*$ cu $\varphi^p = e$.

d) Să se arate că $e \in H$.

e) Să se arate că dacă $\sigma \in H$, atunci $\sigma^{-1} \in H$.

16. Să se calculeze σ^{2010} în următoarele cazuri:

a) $\sigma = \begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$; b) $\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$; c) $\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$;

d) $\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$; e) $\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&1&2&3&8&5&6&7\end{pmatrix}$.

17. Fie $\sigma \in S_{2006}$. Să se arate că $f : \{1, 2, \ldots, 2006\} \to \{1, 2, \ldots, 2006\}$, $f(i) = 2007 - \sigma(i)$ este o permutare din S_{2006}, având semnul opus lui σ.

LIBRIS | We know books

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

Rezolvați:

1. Fie $\sigma \in S_{10}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 & 8 & 10 & 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine paritatea lui σ.

b) Să se descompună σ în produs de transpoziții.

c) Să se determine cel mai mic număr natural nenul k pentru care $\sigma^k = e$.

2. Fie $\sigma, \tau \in S_4$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ şi $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze σ^6 şi τ^2.

b) Să se rezolve ecuația $\sigma^{2004} \cdot x = \tau^{2006}$, $x \in S_4$.

c) Să se arate că ecuația $\sigma^{2004} \cdot x^2 = \tau^{2007}$ nu are soluții în S_4.

3. Se dau numerele reale $a_1 < a_2 < \ldots < a_{10}$. Să se determine permutarea $\sigma \in S_{10}$ pentru care $\sum_{i=1}^{10} a_i a_{\sigma(i)} \geq \sum_{i=1}^{10} a_i a_{\tau(i)}$, oricare ar fi $\tau \in S_{10}$.

Testul 2

Indicați răspunsul corect.

1. Câte inversiuni are permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & 8 & 9 & 10 & \ldots & 16 \\ 1 & 3 & 5 & \ldots & 15 & 2 & 4 & \ldots & 16 \end{pmatrix}$.

a) 28; b) 29; c) 30; d) 32.

2. Câte soluții are în S_5 ecuația $x^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$?

a) 0; b) 1; c) 4; d) 8.

3. Câte permutări din S_5 comută cu permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$?

a) 8; b) 6; c) 4; d) 2.